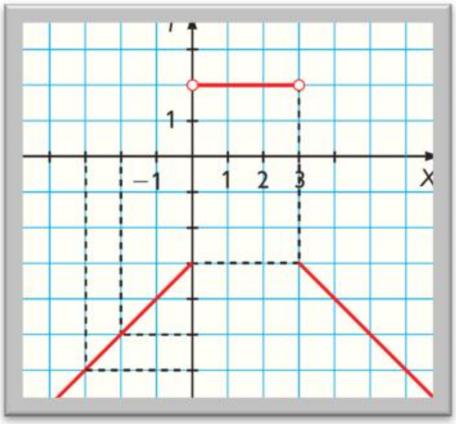
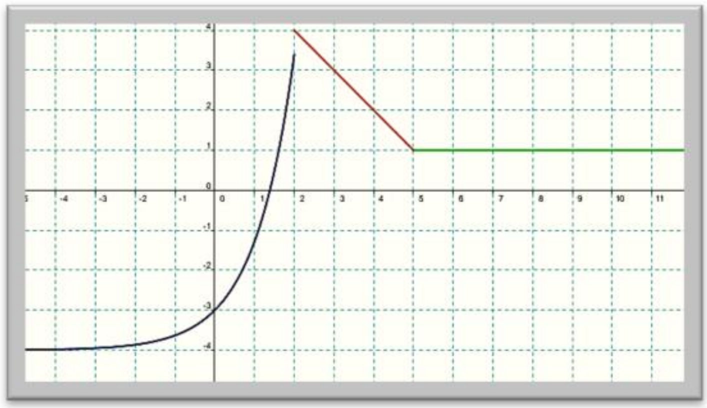
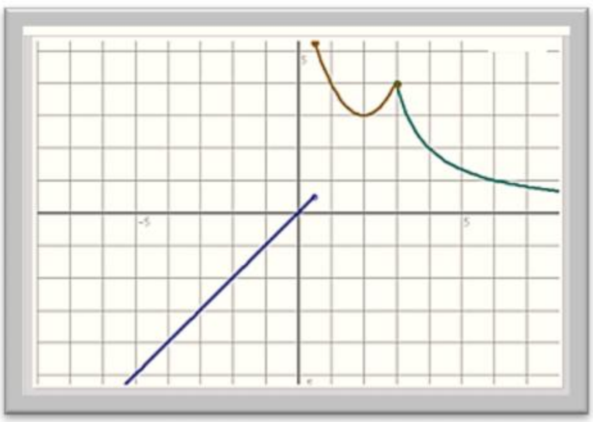
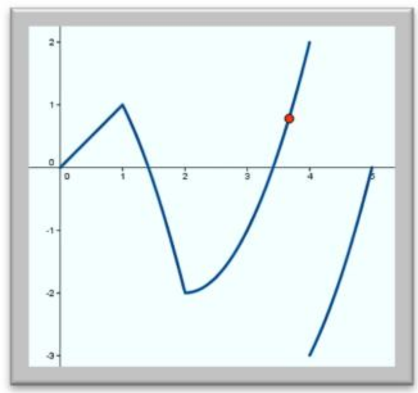
Funciones a trozos.

Imágenes de funciones definidas a trozos.







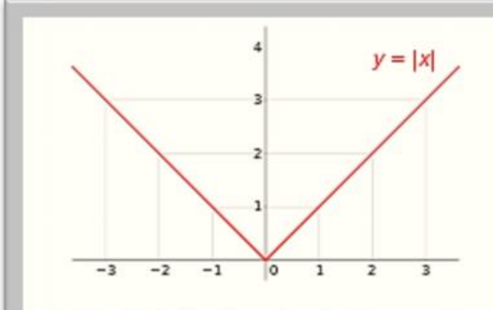


En matemáticas, una **función definida a trozos** (también conocida como **función por partes**) es una función cuya definición (la regla que define la dependencia), cambia dependiendo del valor de la variable independiente. Matemáticamente, una función real f (definida a trozos) de una variable real x es la relación cuya definición está dada por varios conjuntos disjuntos de su dominio (conocidos como subdominios). La palabra "A trozos" se usa para describir cualquier propiedad de una función definida a trozos que se cumple para cada pedacito o "trozo" aunque podría no cumplirse para todo el dominio de f.

Una función es ***diferenciable a trozos*** o ***continuamente diferenciable a trozos*** si cada trozo es diferenciable a lo largo del dominio. En Análisis Convexo, la noción de la derivada puede ser reemplazada por la de subderivada para funciones definidas a trozos. Una función f definida a

trozos puede estar representada por varias expresiones matemáticas (algebraicas y/o trascendentales) de cualquier tipo.

Notación e interpretación



Gráfica de la función valor absoluto, $y = |x|$.

Las funciones definidas a trozos se expresan con una notación funcional común, donde el cuerpo de la función es una lista de expresiones matemáticas asociadas a un subdominio (intervalo). Por ejemplo, sea la función f definida a trozos de la función valor absoluto:

$$|x| \equiv f(x) = \begin{cases} -x, & si\ x < 0 \\ x, & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

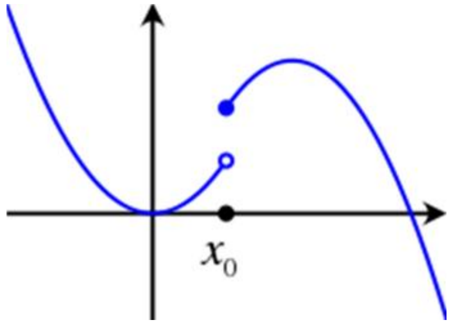
Para todos los valores de x menores que cero, la primera expresión matemática (la función $-x$) es utilizada, lo que altera el signo del valor que asignamos a la variable independiente haciendo el resultado siempre positivo. Para todos los valores de x mayores o iguales que cero, la segunda expresión matemática (la función x) es utilizada.

Sea la función definida a trozos $f\ (x)$, se evalúan varias expresiones del dominio de f:

x	$f(x)$	Función utilizada
−3	3	$-x$
−0.1	0.1	$-x$
0	0	x
1/2	1/2	x
5	5	x

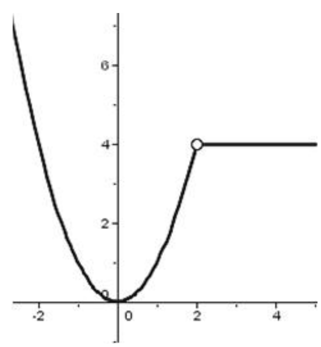
Por lo tanto, para evaluar una función definida a trozos en un determinado valor del dominio, seleccionamos la expresión matemática cuyo subdominio contiene el valor a evaluar para que el valor del rango sea el correcto.

Continuidad



La grafica muestra una función definida a trozos con diferentes funciones cuadráticas a cada lado de x_0. Recordemos que una función definida a trozos es continua en un intervalo dado si está definida en todo el intervalo, las expresiones matemáticas apropiadas que constituyen a la función son continuas en ese intervalo, y no hay discontinuidad en ningún punto extremo de los subdominios en ese intervalo. La función que está a la derecha, por ejemplo, es una función definida a trozos continua en todos sus subdominios, pero no es continua en todo el dominio. Dicha función tiene un salto de discontinuidad (un agujero) en x_0 .

Las funciones a trozos son funciones definidas por distintos criterios, según los intervalos que se consideren, por ejemplo $f(x)=\begin{cases} x^2, & si\ x<2 \\ 4, & si\ x>2 \end{cases}$ tiene por gráfica:



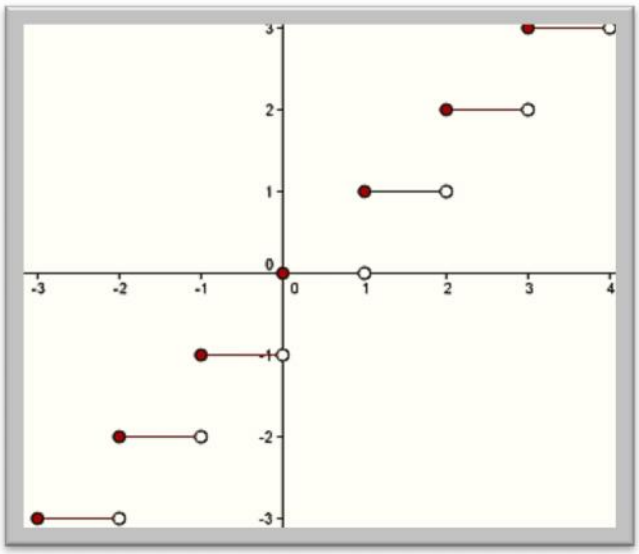
El Dominio (Dm) lo forman todos los números reales menos el 2.

1. La Función parte entera de x.

Es una función que a cada número real hace corresponder el número entero inmediatamente anterior. Se nota: $f(x)=[|x|]$, veamos la siguiente tabla con ejemplos:

x	0	0.5	0.9	1	1.5	1.9	2
$f(x)=[\![x]\!]$	0	0	0	1	1	1	2

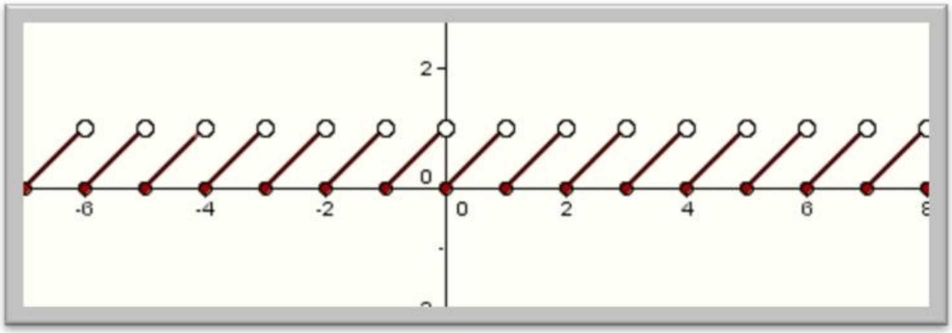
Su grafico en el plano cartesiano es:



2. **Función mantisa**:

Es una función a trozos que hace corresponder a cada número el mismo número menos su parte entera. Se nota: $f(x)=x-[\![x]\!]$, veamos la siguiente tabla con ejemplos:

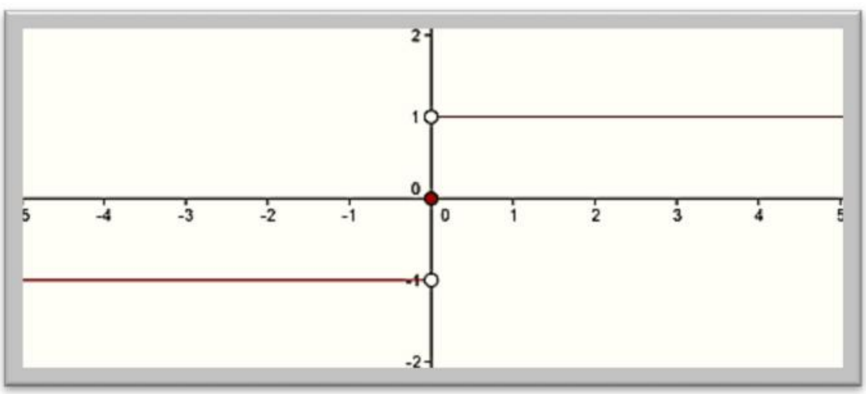
x	0	0.5	0.9	1	1.5	1.9	2
$f(x)=x-[\![x]\!]$	0	0.5	0.9	0	0.5	0.9	0



3. **Función Signo**

Es una función a trozos que hace corresponder a un intervalo un número específico. Se nota: $f(x) = sgn(x)$. Ejemplo.

$$f(x) = \begin{cases} -1, & si\ x < 0 \\ 0, & si\ x = 0 \\ 1, & si\ x > 0 \end{cases}$$

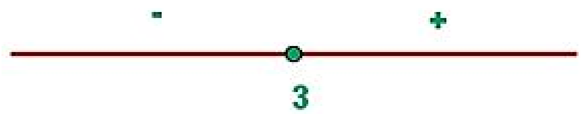


Nota: las funciones en valor absoluto se trasforman en funciones a trozos, mediante los siguientes pasos:

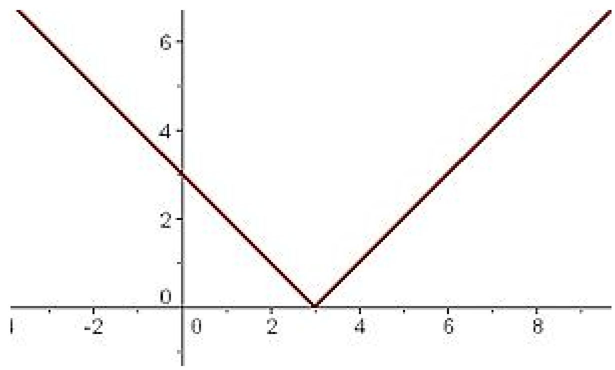
1. Se iguala a cero la función, sin el valor absoluto y se calculan sus raíces.
2. Se forman intervalos con las raíces y se evalúa el signo de cada intervalo.

3. Definimos la función a trozos, teniendo en cuenta que en los intervalos done la x es negativa se cambia el signo de la función.

Ejemplo 1: representemos la función resultante para: $f(x)=|x-3|$ tomamos $x-3=0$ despejamos x para obtener: $x=3$

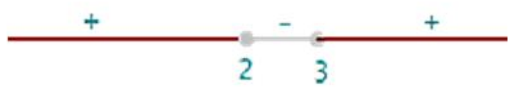


$$f(x)=\begin{cases} -(x-3) & si \quad x<3 \\ x-3, & si \quad x\geq 3 \end{cases}$$



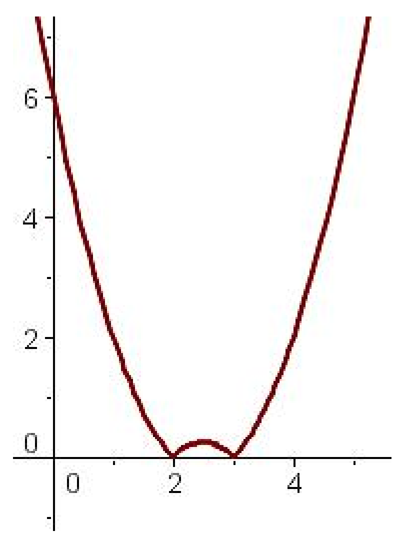
Cuyo $Dm = IR$

Ejemplo 2: sea $f(x)=\left|x^2-5x+6\right|$ tomamos $f(x)=x^2-5x+6$ cuyas raíces son $x=2 \wedge x=3$



De ahí que:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-5x+6 & si\ x<2 \\ -(x^2-5x+6) & si\ 2\leq x<3 \\ x^2-5x+6, & si\ x\geq 3 \end{cases}$$



Cuyo $Dm = IR$